Jordan写像の線形性について (Operator Algebras and Applications)

AUTHOR(S):

羽毛田, 穣祐

数理解析研究所講究録
560巻 1985年 98-109

Ｊｏｒｄａｎ　写像の線形性について

山形大学（工）　羽毛田　穣祐（Jôusuke Hakeda)

昨年、野田の“作用素論と作用素環論研究集会”で次の定理を報告した。

定理Ａ　　Ｍを可変な直和因子を持たないＡW^*代数、ＮをC^*代数、ϕをＭからＮへの　$*$半群同形写像とする。

［即ち　ϕは次の　(i)～(iii)を満足する。
(i)　$\phi(xy)=\phi(x)\phi(y)$　　　$x, y\in M$
(ii)　$\phi(x^*)=\phi(x)^*$　　　$x\in M$
(iii)　ϕ　は全単射である。］

このときϕは加法的である。　更にＭの中心射影元ｅが一意に存在して、ϕはＭｅ上では線形写像、M(1-e)上では共役線形写像になっている。

この「定理Ａ」に関して、斎藤（和）は　ＪＢＷ代数で定理Ａと同様の結果が成立するであろうと予想した。　昨年の野田の研究集会の報告には次の定理も含まれていた。

定理Ｂ　　ＭをI_1型，I_2型，I_3型　の直和因子を持たない　ＪＢＷ代数（積は○で表わす）。　Ｎを　ＪＢＷ代数（Ｎの積も○で表わす）。　ϕをＭからＮへの Jordan 写像とする。

［即ち　ϕは次の（ｉ），(ii)を満足する。
(i)　$\phi(x\circ y)=\phi(x)\circ\phi(y)$　　　$x, y\in M$
(ii)　ϕ　は全単射である。］

このときϕは線形写像である。

この「定理B」は "斎藤の予想" に対する部分的解答にもなっている。一般にＪＢＷ代数は I_n 型，I_∞ 型，II 型，III 型 のＪＢＷ代数の直和に分解され、I_2 型，I_3 型 を除いた各型の ＪＢＷ代数は von Neumann 代数に良く似た面があり、I_2 型，I_3 型は von Neumann 代数とまったく状況が異なっていることが知られている。(例えば spin factor とか Cayley 代数$\mathbb{O}$上の 3×3 エルミート行列に $x \circ y = (1/2)(xy + yx)$ で積$\circ$を定義した Jordan 代数$H_3(\mathbb{O})$ 等)。

Jordan 代数の積は非結合的であるが、特に $H_3(\mathbb{O})$ 等では Cayley 代数の積が非結合的であることが、直接計算を著しく困難にしている。例外 Jordan 代数（特に $H_3(\mathbb{O})$）に於ける "定理B" に相当する結果も、昨年末に一応得られたが、証明法は具体的な $H_3(\mathbb{O})$ の中での計算に依っており、「定理B」の証明とは異なったものである。

この報告ではこれらの場合を I_2 型 の場合も含む統一的な方法によって "斎藤の予想" に対する最終的な結果を与える。

定義　実 Jordan 代数M（積は$\circ$で表わす）からある実代数N（積はMと同じ記号$\circ$で表わす）への写像ϕがM上の Jordan 写像であるとはϕがMからNへの全射かつ積同形写像をいう。

［即ちϕは次の条件 (i)，(ii) を満足する。

(i) $\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$　　$x, y \in M$

(ii) ϕは全単射である。］

以後Mは unital な実 Jordan 代数，ϕはMからある実代数Nへの Jordan 写像を表わすものとし，定理等の記述を除いて、特に付加する条件のみを記述することにする。

主定理　MをI_1 型 直和因子を持たないＪＢＷ代数，Nを実 Jordan Banach 代数，ϕをMからNへの Jordan 写像とする。このときϕは線形写像である。

この定理はI_1 型 直和因子を持たないＪＢＷ代数Mの "代数的構造" がMの "積構造" によって完全に定まってしまうことを示している。

1．Jordan 代数の古典論からの準備

特別 Jordan 代数の議論を一般の Jordan 代数に拡張するために、次の“Macdonaldの定理”と“Shirshof-Cohnの定理”は強力である。

Macdonaldの定理

変数cについて1次の3変数a，b，cの Jordan 多項等式 $p(a, b, z) = 0$ が全ての特別 Jordan 代数で成立するならば、 $p(a, b, c) = 0$ は任意の Jordan 代数で成立する。

Shirshof－Cohn の定理

$M[a, b, 1]$ を $a, b, 1$ で生成された Jordan 部分代数とする。このとき $M[a, b, 1]$ は特別 Jordan 代数である。

$\{abc\} = (a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a - (c \circ a) \circ b$ を Jordan 三重積とよぶ。 $T_a b = a \circ b$, $U_{a,c}\, b = \{abc\}$, $U_a = U_{a,a}$ で Jordan代数上の線形作用素 T_a , $U_{a,c}$, U_a を定義する。 作用素間の交換子積を $[T_a, T_b]$ 等と表わす (i.e. $[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$)。

補題 1.1 $4\{abc\}^2 = 4\{a\{b(a \circ c)b\}a\} - 2\{aba\} \circ \{cbc\} + \{a\{bc^2 b\}a\} + \{c\{ba^2 b\}c\}$ が成立する。

定義 1.2 aとb ($a, b \in M$) が作用素可換 (operator commute) であるとは、 $[T_a, T_b] = 0$ が成立することとする (i.e. 任意の $x \in M$ に対して $a \circ (b \circ x) = b \circ (a \circ x)$)。

任意の Jordan 代数で任意のaに対して $[T_a, T_{a^2}] = 0$ が成立することより、次の補題が導かれる。

補題 1.3 $[T_a, T_{b \circ c}] + [T_b, T_{c \circ a}] + [T_c, T_{a \circ b}] = 0$ が成立する。

また直交する巾等元に関する計算に次の補題は有力である。

補題 1.4 $E_n = \{e_i : i = 1, 2, ..., n\}$ を和が単位元1になる直交する巾等元の集合とする (i.e. $e_i^2 = e_i$, $e_i \circ e_j = 0$, $\Sigma e_i = 1$)。このとき $e, f, g \in E_n$ に対して

$$Te\ U_{f,g} = \begin{cases} U_e & (e = f = g) \\ 1/2\ U_{f,g} & (e \in \{f,\ g\}) \\ 0 & (e \in \{f,\ g\},\ n \geqq 3 \text{の場合}) \end{cases}$$

が成立する。

補題 1.5　直交するMの巾等元eとfに対して、$(U_e\ x) \circ (U_f\ y) = 0$ が成立する。

2.　Jordan 写像の基本的性質

補題 2.1　$\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1$

証明　ϕが全射であることより　$a \in M$　が存在して　$\phi(a) = 0$
従って　$\phi(0) = \phi(0 \circ a) = \phi(0) \circ 0 = 0$
また任意の$x \in M$に対して　$\phi(x) = \phi(1 \circ x) = \phi(1) \circ \phi(x)$
よりϕが全射であるから$\phi(1)$はNの単位元である。

補題 2.2　eとfがMの直交する巾等元ならば
$\phi(e + f) = \phi(e) + \phi(f)$ が成立する。

証明　$\phi(e),\ \phi(f),\ \phi(e) + \phi(f)$ はNの巾等元であり、$\phi(e)$ と $\phi(f)$ は直交する。従って　$h = \phi(\phi(e) + \phi(f))$ とおくと、hはMの巾等元である。
$\phi(e \circ h) = \phi(e) \circ \phi(h) = \phi(e) \circ (\phi(e) + \phi(f)) = \phi(e)$
従って　ϕが単射であることより　$e \circ h = e$、同様にして　$f \circ h = f$
故に　$(e + f) \circ h = e + f$　が成立するから
$\phi(e + f) = \phi((e + f) \circ h) = \phi(e + f) \circ \phi(h)$
$= \phi(e + f) \circ \phi(e) + \phi(e + f) \circ \phi(f) = \phi(e) + \phi(f)$。

補題 2.3　eとfをMの巾等元（直交していなくとも良い）とする。
このとき　$\phi(e - f) = \phi(e) - \phi(f)$　が成立する。

証明　$g = 1 - e,\ x = e - f$　とおくと、
$\phi(x) = ((\phi(e) + \phi(f)) \circ \phi(x)) \circ (\phi(e) + \phi(f))$
$= \phi((e \circ x) \circ e) + \phi((e \circ x) \circ f) + \phi((f \circ x) \circ e)$
$+ \phi((f \circ x) \circ f)$

$(e\circ x)\circ e=(e\circ(1-f))\circ e$ と $\phi(1-e)=1-\phi(e)$
(補題 2.1 及び 2.2 より)

$$
\begin{aligned}
\phi((e\circ x)\circ e) &= (\phi(e)\circ\phi(1-f))\circ\phi(e)\\
&= (\phi(e)\circ(1-\phi(f))\circ\phi(e)\\
&= (\phi(e)\circ\phi(e))\circ\phi(e)\\
&\quad -(\phi(e)\circ\phi(f))\circ\phi(e)\\
&= (\phi(e)\circ(\phi(e)-\phi(f))\circ\phi(e)
\end{aligned}
$$

$$\phi((e\circ x)\circ f)=0=(\phi(e)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(f)$$

同様に

$$\phi((f\circ x)\circ e)=(\phi(f)\circ(\phi(e)-\phi(f))\circ\phi(e)$$

$$
\begin{aligned}
\phi((f\circ x)\circ f) &= \phi(-f)=-\phi(f)\\
&= (\phi(f)\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ\phi(f)
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= ((\phi(e)+\phi(f))\circ(\phi(e)-\phi(f)))\circ(\phi(e)\\
&\qquad +\phi(f))\\
&= \phi(e)-\phi(f)
\end{aligned}
$$

補題 2.4 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするとき、任意の $x, y\in M$ に対して $\phi(\{exe\}+\{fyf\})$
$=\phi(\{exe\})+\phi(\{fyf\})$ が成立する。

証明 $T_e U_e=U_e$, $T_e U_f=0$ が成立しているから、
$$(e+f)\circ(\{exe\}+\{fyf\})=\{exe\}+\{fyf\}$$
従って
$$\phi(\{exe\}+\{fyf\})=\phi(e+f)\circ\phi(\{exe\}+\{fyf\})$$
一方 補題 2.2より $\phi(e+f)=\phi(e)+\phi(f)$ だから

$$
\begin{aligned}
&\phi(\{exe\}+\{fyf\})\\
&\quad =(\phi(e)+\phi(f))\circ\phi(\{exe\}+\{fyf\})\\
&\quad =\phi(e)\circ\phi(\{exe\})+\phi(e)\circ\phi(\{fyf\})\\
&\qquad +\phi(f)\circ\phi(\{exe\})+\phi(f)\circ\phi(\{fyf\})\\
&\quad =\phi(\{exe\})+\phi(\{fyf\})
\end{aligned}
$$

補題 2.5 e と f を M の nontrivial な直交する巾等元とするとき任意の $\alpha, \beta\in C$ に対して $\phi(\alpha e+\beta f)=\phi(\alpha e)+\phi(\beta f)$ が成立する。

証明 補題 2.4 に於いて $x=\alpha\cdot 1$, $y=\beta\cdot 1$ と置くと補題を得る。

定義 2.6　直交する巾等元　EとFに対して　$s^2=e+f$ かつ　$\{ses\}=f$　となる部分対称元sが存在するときeとfは強連結と呼ぶ。

補題 2.7　eをMの nontrivial な巾等元とする。もしeと直交するMの巾等元fが存在してeとfが強連結ならば任意のMの元x，yに対して、
$\phi(\{exe\}+\{eye\})=\phi(\{exe\}+\phi(\{eye\})$ が成立する。

証明　直交する巾等元eとfが強連結だから、ある部分対称元sが存在して
$s^2=e+f$　かつ　$\{ses\}=f$　が成立する。
$r=2\{esf\}$，$p=1/2(e+f+r)$，$q=1/2(e+f-r)$　とおくと
補題 1.1 により　$r^2=\{e\{sfs\}e+\{f\{ses\}f\}$
Shirshov-Cohn の定理より

$$\{sfs\}=\{s\{ses\}s\}=\{s^2 e s^2\}$$
$$=\{(e+f)e(e+f)\}=e$$

従って　$r^2=e+f$
更に　$\{rer\}=2(e\circ r)\circ r-r^2\circ e$，補題 1.4 により
$e\circ r=1/2r$（$f\circ r=1/2r$）従って　$\{rer\}=r^2-r^2\circ e$

$$=r^2\circ(1-e)=(e+f)\circ(1-e)=f$$

かつ　$\{ere\}=2(e\circ r)\circ e-r\circ e=0$
またp，qは直交する巾等元で　$\{epe\}=1/2e+1/2\{ere\}=1/2e$
同様にして　$\{eqe\}=1/2e$
$x_1=4\{exe\}$，$y_1=4\{eye\}$　とおくと Macdonald の定理により
$\{exe\}=\{\{epe\}(4x)\{epe\}\}=\{e\{px_1 p\}e\}$　と
$\{eye\}=\{e\{qy_1 q\}e\}$　が得られる。
従って　$\{exe\}+\{eye\}$

$$=\{e(\{px_1 p\}+\{qy_1 q\})e\}$$
$$=((2e-1)\circ(\{px_1 p\}+\{qy_1 q\})\circ e$$

と

$$\phi(\{px_1 p\}+\{qy_1 q\})$$
$$=\phi(\{px_1 p\}+\phi(\{qy_1 q\})$$

（補題 2.4 より）

$$\phi(\{exe\}+\{eye\})=(\phi(2e-1)\circ(\phi(\{px_1 p\})$$
$$+\phi(\{qx_1 q\})))\circ\phi(e)$$
$$=\phi(\{exe\})+\phi(\{eye\})$$

を得る。

定義 2.8　次の (i)〜(iii) を満足するMのn個の巾等作用素の集合E_nをMの対角単位と呼ぶ。

(i)　E_n の全ての元の和がMの単位元1に等しい。

(ii)　E_n の任意の2元は直交している。

(iii)　E_n の任意の2元は強連結である。

補題 2.9　Mが対角単位E_n（$n \geqq 2$）を持てばϕは　$R \cdot 1$上で加法的である。従って　$R \cdot x$上加法的である。

証明　補題 2.7 に於いて$e = e_i$，$f = e_j$（$i \neq j$），$x = \alpha \cdot 1$，$y = \beta \cdot 1$（$\alpha, \beta \in C$）とおけば、

$\phi(\alpha e_i + \beta e_i) = \phi(\alpha e_i) + \phi(\beta e_i)$　　（$i = 1,2,\ldots, n$）

故に

$$
\begin{aligned}
\phi(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1) &= \phi(\Sigma(\alpha + \beta) e_i) \\
&= \Sigma \phi((\alpha + \beta) e_i) \quad \text{(補題 2.5)} \\
&= \Sigma(\phi(\alpha e_i) + \phi(\beta e_i)) \\
&= \Sigma \phi(\alpha e_i) + \Sigma \phi(\beta e_i) \\
&= \phi(\Sigma \alpha e_i) + \phi(\Sigma \beta e_i) \quad \text{(補題 2.5)} \\
&= \phi(\alpha \cdot 1) + \phi(\beta \cdot 1)
\end{aligned}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\phi(\alpha x + \beta x) &= \phi((\alpha + \beta) \cdot 1) \circ \phi(x) \\
&= (\phi(\alpha \cdot 1) + \phi(\beta \cdot 1)) \circ \phi(x) \\
&= \phi(\alpha x) + \phi(\beta x)
\end{aligned}
$$

を得る。

補題 2.10　Mに対角単位E_n（$n \geqq 2$）が存在するとき
Mの対称元　s, t　に対して　（i.e.　$s^2 = 1$，$t^2 = 1$）
$\phi(s + t) = \phi(s) + \phi(t)$　が成立する。

証明　$e = 1/2(1 + s)$，$f = 1/2(1 - t)$　とおくと、
eとfは　巾等元となる。

$s = 2e - 1$，$t = 1 - 2f$　だから　$s + t = 2(e - f)$

従って　補題 2.3　と　補題 2.5　と　補題 2.9　により

$$
\begin{aligned}
\phi(s + t) &= \phi(2(e - f)) = 2\phi(e - f) \\
&= 2(\phi(e) - \phi(f)) \\
&= \phi(e) - (1 - \phi(e)) + (1 - \phi(f)) - \phi(f) \\
&= \phi(e) + \phi(-(1 - e)) + \phi(1 - f) + \phi(-f) \\
&= \phi(e - (1 - e)) + \phi(1 - f) - f) \\
&= \phi(s) + \phi(t)
\end{aligned}
$$

補題 2.11　Mが対角単位 E_n $(n \geqq 2)$ を持てば
$\phi(x) = \sum_i \phi(\{e_i \ x e_i\}) + 2\sum_{i<j} \phi(\{e_i \ x e_j\}$ が成立する。

証明　$\sum_i \phi(e_i) = 1$ より

$$\phi(x) = ((2\sum_i \phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (\sum_i \phi(e_i))$$

$$= 2\sum_i (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i)$$

$$+ 2\sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$- \sum_i \phi(x) \ \phi(e_i)$$

$$= \sum_i ((2\phi(e_i) - 1) \circ \phi(x)) \circ (e_i)$$

$$+ 2\sum_{i \neq j} (\phi(e_i) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_j)$$

$$2\phi(e_i) - 1 = \phi(e_i) - (1 - \phi(e_i))$$
$$= \phi(e_i) - \phi(1 - e_i) = \phi(-(1 - e_i))$$
$$= \phi(e_i - (1 - e_i)) = \phi(2e_i - 1)$$

従って　$(\phi(2e_i - 1) \circ \phi(x) \circ \phi(e_i)$
$$= \phi(((2e_i - 1) \circ x) \circ e_i)$$
$$= \phi(\{e_i \ x e_i\})$$

直交する巾等元　e_i と e_i は
作用素可換から　$(e_i \circ x) \circ e_j = (e_j \circ x) \circ e_i$
だから　$i \neq j$　に対して
$$(\phi(e_i) \circ \phi(x) \circ \phi(e_j) + (\phi(e_j) \circ \phi(x)) \circ \phi(e_i)$$
$$= \phi((e_i \circ x) \circ e_j) + \phi((e_j \circ x) \circ e_i)$$
$$= 2\phi((e_i \circ x) \circ e_j)$$
$$= \phi(2(e_i \circ x) \circ e_j) \qquad (\text{補題 } 2.9)$$
$$= \phi(\{e_i \ x e_j\})$$

この補題 2.11 はMが対角単位 E_n $(n \geqq 2)$ を持てば　写像　$\phi_i : x \longmapsto \phi(\{e_i \ x e_i\})$ と　写像 $\phi_{i,j} : x \longmapsto \phi(\{e_i \ x e_j\})$ が加法的ならば ϕ は加法的であることを示している。既に ϕ_i の加法性は補題 2.7

で示されているのでϕの加法性を示すためには　$\phi_{i,j}$ の加法性を示せば良いことがわかる。

命題 2.12　　Mが対角単位E_n （$n \geqq 4$）を持つ実 Jordan 代数ならば M上の Jordan 写像ϕは加法的である。

証明　　互いに異なる添数　i，j，m，nに対して、部分対称元　$s_{i,j}$ と $s_{m,n}$ が存在して　$s^2=e_i+e_m$，$s^2=e_j+e_n$，$\{s_{i,m}\ e_i\ s_{i,m}\}=e_m$，$\{s_{j,n}\ e_j\ s_{j,n}\}=e_n$ が成立する。
$r=2\{e_i\ s_{i,m}\ e_m\}$，$t=2\{e_j\ s_{j,n}\ e_n\}$，$s=r+t$，
$e=e_i+e_j$，$f=e_n+e_m$　とおくと補題 1.1 により
$r^2=e_i+e_m$，$t^2=e_j+e_n$
また補題 1.4 より　$r\circ t=0$　従って　$s^2=e+f$　が成立し、
$\{r\,e\,r\}=e_m$，$\{t\,e\,t\}=e_n$，$\{r\,e\,t\}=0$　従って $\{s\,e\,s\}=f$が成立する。故に巾等元eとfは部分対称元sによって強連結である。
従って　補題 2.7 により
$\phi(\{e\,x\,e\}+\{e\,y\,e\})=\phi(\{e\,x\,e\})+\phi(\{e\,y\,e\})$ が成立する。補題 1.4 により

$$
\begin{aligned}
\{e\,\{e_i\,x\,e_j\}\,e\}
&=2\,(e\circ\{e_i\,x\,e_j\})\circ e-\{e_i\,x\,e_j\}\circ e\\
&=\{e_i\,x\,e_j\}
\end{aligned}
$$

となり

$$
\begin{aligned}
\phi(\{e_i\,x\,e_j\}+\{e_i\,y\,e_j\})
&=\phi(\{e\,\{e_i\,x\,e_j\}\,e\}+\{e\,\{e_i\,y\,e_j\}\,e\})\\
&=\phi(\{e_i\,x\,e_j\})+\phi(\{e_i\,y\,e_j\})
\end{aligned}
$$

だから　写像　$x\longmapsto\phi(\{e_i\,x\,e_j\})$ は任意の異なるi，jについて加法的である。　補題 2.7 と併せると結論を得る。

3．　Jordan　Banach代数上のJordan写像

この節では対称となるMは unital な実 Jordan Banach　代数とする。

補題 3.1　eとfを直交するMの巾等元とする。
このとき$\|x\|\leqq 1$となる　$x\in M$に対して、$\{e\,x\,f\}=\{e\,s\,f\}$
となる対称元　sが存在する。

証明　$g=1-e$, $a=\{e\{xgx\}e\}$, $b=\{g\{xex\}g\}$ とおく。$Me(a)$ (resp. $Mg(b)$) は e と a を (resp. g と b を) 含む UeM (resp. UgM) の最小の閉部分代数とする。
$\{p_n(\lambda)\}$ を $[-1,1]$ 上 $\sqrt{1-\lambda}$ へ一様収束する多項式とする。
$\|x\|\leqq 1$ より $\|a\|\leqq 1$, $\|b\|\leqq 1$ であり
$e\circ\{exy\}=g\circ\{exg\}=1/2\{exg\}$ （補題 1.4） と
$a^K\circ\{exg\}=b^K\circ\{exg\}$ $(k=1,2,\ldots)$ が成立するから
$\{p_n(a)\}$ (resp. $\{p_n(b)\}$) は $\sqrt{e-a}$ (resp. $\sqrt{g-b}$) に一様収束する。従って $\sqrt{e-a}\circ\{exg\}=\sqrt{g-b}\circ\{exg\}$ が成立する。
$s=\sqrt{e-a}-\sqrt{g-b}+2\{exg\}$ とおくと
$\sqrt{e-a}\circ\sqrt{g-b}=0$ （補題 1.5）
補題 1.1 と上のことより s はMの 対称元となる。更に e と f は作用素可換であり、補題 1.4より

$$
\begin{aligned}
\{esf\} &= 2(e\circ s)\circ f \\
&= (\ e-a+2\{exg\})\circ f \\
&= 2\{exf\}\circ f \\
&= \{exf\}
\end{aligned}
$$

命題 3.2　Mが対角単位E_n $(n\geqq 2)$ を持つ実 Jordan Banch 代数，Nが実 Jordan normed 代数ならばMからNへの Jordan 写像 ϕ は線形である。

証明　$\delta=\|x\|+\|y\|$, $x_1=\delta^{-1}x$, $y=\delta^{-1}y$ とおくと、ある固定された i,j $(i\neq j)$ について、$\{e_i xe_j\}=\{e_i se_j\}$, $\{e_i y_1 e_j\}=\{e_i te_j\}$ となる対称元 s,t が存在する。
従って

$$
\begin{aligned}
&\phi(\{e_i(x+y)e_j\}) \\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i x_1 e_j\}+\{e_i y_1 e_j\}) \\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i se_j\}+\{e_i te_j\}) \quad \text{（補題 3.1）} \\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i(s+t)e_j\}) \\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(2(e_i\circ(s+t)\circ e_j)) \\
&=2\phi(\delta\cdot 1)\circ((\phi(e_i)\circ\phi(s+t))\circ\phi(e_j)) \\
&=2\phi(\delta\cdot 1)\circ((\phi(e_i)\circ(\phi(s)+\phi(t)))\circ\phi(e_j)) \\
&\qquad\qquad \text{（補題 2.10 ）} \\
&=\phi(\delta\cdot 1)\circ\phi(\{e_i se_j\})+\phi(\{e_i te_j\}) \\
&=\phi(\{e_i xe_j\})+\phi(\{e_i ye_j\})
\end{aligned}
$$

故に 写像 $x\longmapsto\phi(\{e_i xe_j\})$ は加法的であり、補題 2.7 と併せ

ると　補題 2.11 により　ϕはM上加法的である。
写像　ϕが加法的だから任意の整数nと任意の自然数mに対して
$n\phi(x)=\phi(m(n/m\ x)=m\phi(n/m\ x)$　従って任意の有理数pに対して　$\phi(px)=p\phi(x)$　全ての　$x\in M$に対して成立する。
$[\lambda]$がλを越えない最大の整数を表わすものとする（Gauss の記号）。この時任意の正の数λに対して　ϕが正値写像だから

$$0\leqq\phi(\lambda\cdot 1)\leqq\phi(\,(1/[1/\lambda]\,)\cdot 1)=(1/[1/\lambda]\,)\cdot 1$$

従って　$\lambda\longmapsto\phi(\lambda\cdot 1)$は　$0\in R$で連続である（$\phi(-1)=-1$）。
故に　R上で連続であり、任意の実数rに対して　$\phi(rx)=r\phi(x)$　$(x\in M)$が成立する。

主定理の証明　Mは次の形に直和分解される。
即ち　$M=M_1\oplus M_2\oplus M_3\oplus M_4\oplus\cdots\cdot$
ここでM_1はI$_\infty$型JBW代数、M_2はII型JBW代数、M_3はIII型JBW代数、M_i $(i\geqq 4)$はI$_{n_i}$型 $(n_i\geqq 2)$ JBW代数である。各M_iは各々対角単位E_{n_i} $(n_1=n_2=n_3=4,\ n_i\geqq 2\ (i\geqq 4))$を持つ実Jordan Banach 代数であるから、$p_i=0\oplus 0\oplus\cdots\cdot\oplus 1\oplus 0\oplus\cdots\cdot$とおくと、$M\circ p_i$は$M_i$と同型な実 Jordan Banach　代数だから　$M\circ p_i$とM_iを同一視することにする (i.e. $M\circ p_i=M_i$)。　$\phi(M\circ p_i)=N_i$とすると、N_iはNの Jordan　部分代数で　$\phi_i=\phi|(M_i\circ p_i)$は$M_i\circ p_i$から$N_i$への Jordan 写像である。
従って　命題 3.2　により線形写像である。Nと$\oplus N_i$は
写像$\eta:\phi(x)\longmapsto\oplus\phi(x)\circ\phi(p_i)$　によって代数的に Jordan 同形であり、Mと$\oplus(M\circ p_i)$も　写像$\theta:x\longmapsto\oplus\phi(M\circ p_i)$によって代数的に Jordan 同形である。更に次の diagram　は可換となっているからϕは線形写像である。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad\phi\quad} & N \\ {\scriptstyle\theta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\eta} \\ \oplus M_i & \xrightarrow[\quad\oplus\theta_i\quad]{} & \oplus N_i \end{array}$$

参 考 文 献

【１】 N.Jacobson, Structure and Representatins of Jordan dgdras, Amer.Math.Soc.Colloq.Publ. ３９，１９６８．

【２】 羽毛田 穣祐： 作用素代数上の乗法的写像の加法性について，作用素・作用素環論研究集会記録，１９８４．

【３】 H.H.Olson and E.Stormer, Jordan Operator Algebras, Pitman, １９８４．